

Nozioni di Fisica Biochimica e Biologia

Fisica Medica

Lezione 3 - IDROSTATICA E FLUIDODINAMICA

Anno Accademico 2022/2023

AGENDA DEL CORSO

	DATA	ORE	ARGOMENTI
LEZIONE 1	30/11/2022	3	Richiami e nozioni introduttive di base: Grandezze fisiche, unità e sistemi di misura. Errori di misura. Scalari e vettori. Operazioni tra vettori. Algebra di base. Relazioni funzionali e rappresentazioni grafiche. Trigonometria.
LEZIONE 2	02/12/2022	3	Cinematica e dinamica del corpo: Sistemi di riferimento. Moto rettilineo uniforme. Moto rettilineo uniformemente accelerato. Principi della dinamica. Forze. Rotazione e momento di una forza. Leve. Lavoro ed energia.
LEZIONE 3	05/11/2022	3	Fluidodinamica: Statica dei fluidi. Pressione e densità. Legge di Stevino. Tubo di Torricelli. Principio di Pascal e torchio idraulico. Principio di Archimede. Viscosità. Portata. Teorema di Bernoulli. Sfigmomanometro. Aneurisma e stenosi.
LEZIONE 4	07/11/2022	3	Termodinamica: Sistemi termodinamici. Temperatura e calore. Misura della temperatura. Scale termometriche. Capacità termica e calore specifico. Equilibrio termico. Dilatazione termica. Passaggi di stato. Trasmissione del calore. Bilancio energetico nel corpo umano.
LEZIONE 5	13/11/2022	3	Fenomeni elettrici e magnetici: Carica elettrica. Elettrizzazione. Conduttori e isolanti. Legge di Coulomb. Campo elettrico. Potenziale elettrico. Intensità di corrente. I e II Legge do Ohm. Onde elettromagnetiche. Ultrasuoni. Effetto Doppler.
PROVA FINE CORSO			

L'**idrostatica** (detta anche *statica dei fluidi* o *fluidostatica*) è la parte della Fisica che studia lo stato di quiete dei fluidi, ossia dei liquidi e dei gas, e che permette di analizzare e risolvere i problemi sullo stato di equilibrio dei fluidi.

La **fluidodinamica** (detta anche *dinamica dei fluidi* o *idrodinamica*) al contrario si occupa dello studio del moto dei fluidi e delle cause che lo determinano, mediante svariate leggi che consentono di analizzare il comportamento di liquidi e gas in movimento.

In modo del tutto analogo rispetto alla **cinematica** e alla **dinamica**, l'idrostatica e la fluidodinamica fanno parte della branca della Fisica che va sotto il nome di **Meccanica dei fluidi**.



Prima di studiare le leggi e le equazioni che ne descrivono il comportamento è bene stabilire che cosa si intende col termine **fluido**. In generale i fluidi sono sia i liquidi sia i gas e, a titolo d'esempio, il termine *fluido* si può riferire sia all'acqua che all'aria.

La caratteristica principale che li distingue dai solidi, e che quindi ci permette di fornire una **definizione di fluido**, è la seguente: i fluidi non hanno una forma propria e tendono ad assumere la forma del recipiente che li contiene. Come ci insegna l'esperienza comune, tale caratteristica è valida sia per i liquidi che per i gas.



Vediamo quali sono le differenze che permettono di **classificare i fluidi in liquidi e gas**.

1) La prima e più evidente differenza tra liquidi e gas riguarda il **volume**. Se da un lato i liquidi hanno sempre un proprio volume, tipicamente misurato in **litri**, dall'altro i gas non sono caratterizzati da un volume ben definito.

Se versiamo un litro di acqua dentro a una bottiglia con una capienza pari a un litro, essa occuperà tutto il volume disponibile assumendo esattamente la stessa forma della bottiglia. Se successivamente rovesciamo lo stesso litro d'acqua in una bottiglia da due litri, essa tenderà di nuovo ad assumere la forma del suo contenitore occupando nuovamente un volume di un litro, per cui la bottiglia rimarrà mezza vuota.

I gas presentano un comportamento diverso rispetto ai liquidi. Essi tendono ad occupare tutto lo spazio che hanno a propria disposizione, e al crescere dello spazio disponibile diventano via via più rarefatti.

2) Un'altra differenza consiste nel fatto che **i liquidi sono incompressibili**, ossia non si riesce diminuirne il volume; al contrario **i gas sono facilmente comprimibili**.

3) I liquidi hanno una **densità** maggiore di quella dei gas; di conseguenza, a parità di volume, i liquidi presentano una **massa** maggiore.

Le differenze tra liquidi e gas sono dovute alle rispettive strutture atomiche e molecolari. Nei liquidi gli atomi e le molecole che li compongono sono legati tra di loro da **forze** più intense rispetto a quelle che ritroviamo nei gas. Per questo motivo i liquidi mantengono un volume proprio mentre i gas si adattano ai recipienti che li contengono.

La **principale caratteristica dei fluidi** è la loro capacità di scorrere: gli strati che costituiscono un fluido possono scorrere l'uno sull'altro nonché sulle pareti del recipiente che li contiene. A tale scorrimento si oppone sempre una **forza di attrito** interna al fluido stesso, che viene chiamata **viscosità** e di cui parleremo nel seguito.

PRESSIONE E DENSITÀ

La **pressione** in Fisica è una grandezza che misura l'azione della forza, esercitata su una superficie, rispetto all'unità di superficie su cui viene esercitata. La pressione viene misurata in pascal e riveste un'importanza fondamentale nello studio dei fluidi.

Prima di presentare la **definizione di pressione** facciamo un piccolo ripasso sul concetto di densità. La **densità** si definisce come il rapporto tra la **massa** e il **volume** (talvolta viene anche denominata *densità volumica*):

$$\rho = \frac{m}{V}$$

L'**unità di misura** della densità nel **Sistema Internazionale** è il **chilogrammo al metro cubo** (kg/m^3). Nonostante ciò nelle applicazioni essa viene espressa frequentemente in **grammi al centimetro cubo** (g/cm^3) e a tal proposito la relazione di conversione che lega le due misure è

$$1 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} = 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

La densità misura la quantità di massa di un corpo per unità di volume, quindi nel caso di liquidi e gas esprime la quantità di massa di fluido per metro cubo. In particolare la densità dei liquidi può essere considerata in buona approssimazione costante, poiché sappiamo che essi sono incompressibili.

Nelle applicazioni e negli esercizi c'è uno specifico valore che è particolarmente ricorrente e che quindi è bene tenere: la **densità dell'acqua**

$$\rho_{acqua} = 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

Da ultimo, ricordiamo che i liquidi hanno una densità molto maggiore rispetto ai gas. A titolo di esempio basta confrontare il valore della densità dell'acqua con quello della **densità dell'aria**

$$\rho_{aria} = 1,225 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \rightarrow 15 \text{ } ^\circ\text{C}, 1 \text{ atm}, 0\% \text{ umidità}$$

Per definire la pressione si considera l'azione che essa esercita, o più precisamente la forza che la pressione esercita su una data superficie S . Per definizione la pressione è data dal rapporto tra il modulo della forza \vec{F}_\perp agente perpendicolarmente su una superficie S e l'area della superficie stessa:

$$p = \frac{F_\perp}{S}$$

L'**unità di misura della pressione** nel Sistema Internazionale è il **newton** al **metro quadro** (N/m^2). Tale unità di misura prende il nome di **pascal** e si indica con il simbolo Pa (per approfondire potete leggere la lezione dedicata alle **unità di misura della pressione**):

$$1 \text{ Pa} = 1 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$

Dalla precedente definizione è immediato ricavare le **formule inverse della pressione**

$$S = \frac{F_\perp}{p}$$

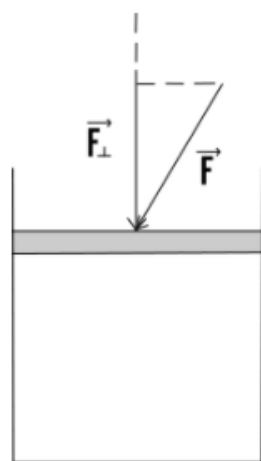
$$F_\perp = pS$$

La pressione è dunque **direttamente proporzionale** alla forza e **inversamente proporzionale** alla superficie. Per incrementare il valore di pressione si può aumentare il modulo della forza oppure diminuire l'area della superficie considerata.

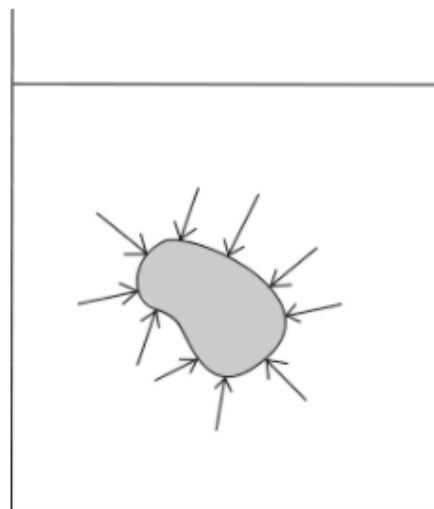
Per esercitare una **pressione su un fluido** è necessario chiuderlo all'interno di un contenitore e premerlo con una forza perpendicolare a una superficie mobile, come in figura.

Nel calcolo della pressione esercitata su un fluido è fondamentale tenere a mente che la forza deve essere perpendicolare alla superficie. Se la forza fosse inclinata rispetto alla superficie, ai fini del calcolo della pressione dovremmo considerare solo la componente perpendicolare della forza, perché quella parallela tende a far scivolare la superficie del fluido ma non contribuisce a comprimerlo.

D'altra parte **ogni fluido esercita una pressione in tutte le direzioni** sulle pareti del recipiente che lo contiene e su qualunque oggetto sia immerso al suo interno, con forze dirette perpendicolarmente a ogni punto della sua superficie e con l'effetto di **comprimerlo** uniformemente.



La componente perpendicolare della forza è l'unica che contribuisce all'azione della pressione.



Pressione esercitata da un fluido.

PROPRIETÀ DELLA PRESSIONE

- 1) La pressione è direttamente proporzionale alla forza perpendicolare ed inversamente proporzionale all'area della superficie su cui agisce la forza.
- 2) Riguardando la definizione di pressione è facile vedere che essa non è una **grandezza vettoriale**, bensì scalare. Non facciamoci trarre in inganno dalla presenza della forza: pur essendo una grandezza vettoriale, nella formula compare solamente in modulo.
- 3) Oltre ad esercitare una pressione su qualunque corpo immerso, il fluido esercita anche una pressione sulle pareti del suo contenitore spingendole verso l'esterno.
- 4) Lo strumento per misurare la pressione di un fluido viene detto *barometro aneroide* (o più semplicemente **barometro**). Si tratta di un contenitore all'interno del quale è stato fatto il vuoto; il contenitore ha una parete mobile agganciata a una **molla** e la compressione della molla misura il valore della forza che preme contro la superficie mobile. In questo modo viene calcolato il valore della pressione che il fluido sta esercitando. Se si ruota nello spazio il barometro cambiando l'orientazione della superficie mobile, si può verificare che la pressione in un certo punto è sempre la stessa e che quindi **la pressione non ha direzionalità**, ossia non agisce lungo una direzione privilegiata.

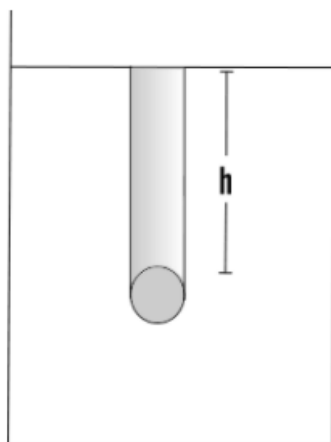
LEGGE DI STEVINO

La **legge di Stevino** è una legge che esprime il valore di pressione esercitata da un fluido su un corpo immerso al suo interno, in funzione della profondità a cui è situato il corpo e a partire dal valore dell'accelerazione di gravità e dalla densità del fluido.

La legge di Stevino permette di calcolare la pressione che un fluido incompressibile è in grado di esercitare su un corpo al variare della **profondità** a cui è collocato il corpo. La legge analitica che esprime la variazione di pressione in funzione della profondità è la **formula della legge di Stevino**:

$$p = \rho gh$$

dove ρ denota la **densità** del fluido, g il valore dell'**accelerazione di gravità** ($\approx 9,81 \text{ m/s}^2$) e h la profondità misurata rispetto a un opportuno **sistema di riferimento**.



Interpretazione della legge di Stevino:
colonna di liquido di altezza h .

$$\rho = \frac{m}{V}$$

Se consideriamo la colonna d'acqua, il suo **volume** è:

$$V = A_{base}h \rightarrow \rho = \frac{m}{A_{base}h}$$

Sostituiamo questa espressione nella legge di Stevino:

$$p = \frac{m}{A_{base}h}gh = \frac{m}{A_{base}}g = \frac{F_p}{A_{base}}$$

LEGGE DI STEVINO

La legge di Stevin



1) dato un fluido incompressibile contenuto in un recipiente chiuso e un corpo immerso nel fluido, la pressione esercitata sul corpo viene descritta dalla legge di Stevino:

$$p = \rho gh$$

2) Dato un fluido incompressibile in un recipiente aperto e un corpo immerso al suo interno, la pressione esercitata sul corpo è data dalla somma di due contributi: la pressione esercitata dall'atmosfera e quella esercitata dal fluido

$$p = p_0 + \rho gh$$

Il valore p_0 corrisponde alla pressione esercitata dalla colonna d'aria e coincide con la pressione atmosferica p_{atm} solo al livello del mare; a quote superiori al livello del mare esso assume un valore $p_0 < p_{atm}$, poiché la colonna d'aria sovrastante ha un'altezza minore.

Come primissima osservazione vogliamo sottolineare una condizione che potrebbe essere passata inosservata: **la legge di Stevino vale solamente per i fluidi incompressibili**. In altri termini essa è valida solamente nel caso dei liquidi.

Dalla formula della legge di Stevino è facile comprendere che la pressione è **direttamente proporzionale** alla profondità h , oltre che alla densità del fluido ρ .

Attenzione al fatto che con la lettera h si intende la profondità e non l'altezza; se ad esempio volessimo calcolare a quale pressione siamo soggetti quando ci troviamo immersi in mare a 2 metri di profondità, dovremmo considerare un sistema di riferimento in cui la quota zero coincide con la superficie dell'acqua. Dunque $h = 2 \text{ m}$, cioè la distanza che ci separa dalla superficie dell'acqua e non dal fondo del mare.

Per procedere al calcolo del valore di pressione in questo esempio è necessario conoscere il valore di **densità dell'acqua di mare**, indicativamente $\rho = 1030 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$, che è leggermente superiore al valore di **densità dell'acqua** $\left(\rho = 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right)$:

$$p = \rho g h = \left(1030 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right) \cdot \left(9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right) \cdot (2 \text{ m}) \simeq 2,02 \cdot 10^4 \text{ Pa}$$

Quella che abbiamo calcolato nel precedente esempio è la pressione con cui l'acqua tende a comprimerci a una profondità di 2 metri. Scendendo più in profondità è ragionevole aspettarsi che la pressione aumenti, ma in che modo?

Se riscriviamo la precedente formula e consideriamo costanti la densità e l'accelerazione di gravità, allora possiamo **interpretare la legge di Stevino** come una **funzione** che esprime la pressione al variare della profondità

$$p(h) = \rho gh$$

In questi termini si nota subito che l'espressione della funzione $p = p(h)$ è della forma

$$f(x) = Mx$$

dunque essa ha come grafico una **retta** con **coefficiente angolare** $M = \rho g$ e **ordinata all'origine** nulla. In buona sostanza la pressione aumenta in modo **lineare**, il che significa che se la profondità raddoppia, la pressione raddoppia; se la profondità triplica, anche la pressione triplica... e così via.

PRESSIONE ATMOSFERICA

La **pressione atmosferica** è la pressione esercitata da una colonna d'aria dell'atmosfera; la pressione atmosferica media vale 101325 Pa, che in condizioni standard (al livello del mare, a 0°C e a 45° di latitudine) corrisponde a 1 atm e a 1,01325 bar. Il suo valore decresce al crescere dell'altitudine.

L'aria che costituisce l'atmosfera è un **fluido** ed è in particolare un gas all'interno del quale siamo completamente immersi. Come qualunque altro fluido, anche l'aria esercita una **pressione** che tende a comprimere in tutte le direzioni gli oggetti che vi si trovano immersi.

La pressione esercitata dall'aria viene detta **pressione atmosferica** e in condizioni standard (cioè al livello del mare - **altitudine** zero - a una **temperatura** di 0°C e a una **latitudine** di 45°) il suo valore in **pascal** è:

$$p_{atm} = 101325 \text{ Pa} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{altitudine : } 0 \\ \text{latitudine : } 45^\circ \\ \text{temperatura : } 0^\circ\text{C} \end{array} \right.$$

Tale **valore della pressione atmosferica** va considerato come riferimento medio (pressione atmosferica media) valido solamente alle condizioni standard. Esso viene determinato dal **peso** della colonna d'aria che sovrasta i corpi e che preme contro la loro superficie.

UNITÀ DI MISURA DELLA PRESSIONE

L'**unità di misura della pressione atmosferica** è ovviamente la stessa della pressione, ma è opportuno spendere qualche parola in più al riguardo. Poiché la pressione atmosferica media ha un valore piuttosto diffuso nelle applicazioni fisiche, si è deciso di usarla come riferimento per definire una nuova **unità di misura della pressione**, chiamata non a caso **atmosfera**

$$1 \text{ atm} = 101325 \text{ Pa}$$

Tale unità non rientra nel **Sistema Internazionale** anche se viene tutt'oggi utilizzata in diversi contesti pratici. Un'ulteriore misura mediante la quale viene misurata la pressione atmosferica è il **bar**, tipicamente usato nei barometri atmosferici e nella misura della pressione degli pneumatici:

$$1 \text{ bar} = 100000 \text{ Pa} = 10^5 \text{ Pa}$$

Come si intuisce facilmente 1 bar e 1 atmosfera hanno un valore simile

$$1 \text{ atm} \simeq 1,01325 \text{ bar}$$

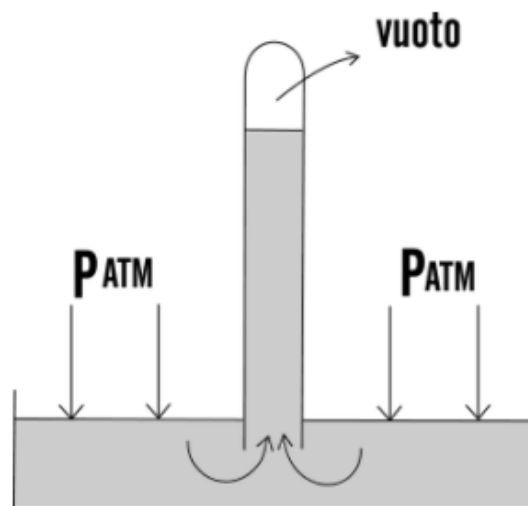
La pressione atmosferica ricorre in moltissimi esercizi e applicazioni pratiche. Se ad esempio vogliamo calcolare a quale pressione siamo soggetti quando ci troviamo immersi a 5 metri di profondità in acqua, dobbiamo aggiungere alla pressione dovuta all'acqua, che calcoliamo con la legge di Stevino, anche la pressione atmosferica che preme l'acqua dall'alto.

$$\begin{aligned} p &= p_{atm} + \rho_{acqua}gh = \\ &= 101325 \text{ Pa} + \left(1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right) \cdot \left(9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right) \cdot (5 \text{ m}) = 150375 \text{ Pa} \end{aligned}$$

IL TUBO DI TORRICELLI

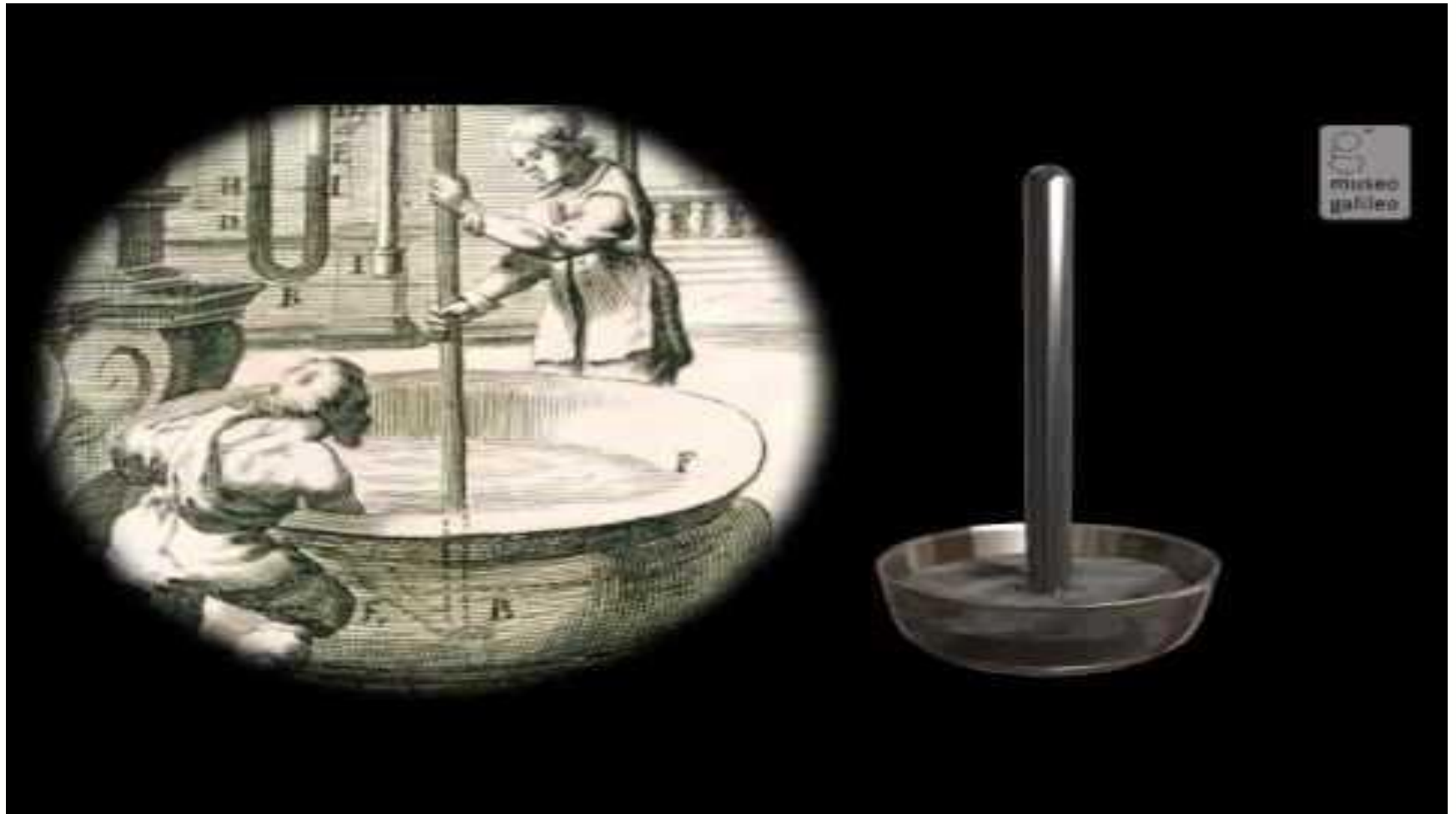
Evangelista Torricelli nel '600 fu il primo a capire che l'atmosfera esercita una **pressione** e fu anche il primo a ideare un metodo per misurarla. Il suo apparato strumentale prese il nome di **barometro di Torricelli**, ma viene talvolta chiamato **tubo di Torricelli** o **barometro a mercurio**. In generale, qualunque strumento atto alla misurazione della pressione si chiama *barometro* (ricordate che una delle **unità di misura della pressione** è il **bar**?).

Analizziamo il principio su cui si basa l'**esperimento di Torricelli**. In una vaschetta viene versato del mercurio, un metallo liquido dalla **densità** piuttosto elevata ($13,579 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$). Nella vaschetta si inserisce un tubo aperto in basso e chiuso in alto, all'interno del quale è stato fatto il vuoto.



Il barometro dell'esperimento di Torricelli.

IL TUBO DI TORRICELLI



IL TUBO DI TORRICELLI

In questo modo la pressione atmosferica, che si esercita verso il basso sul mercurio al di fuori del tubo, tende a farlo salire lungo il tubo fino ad una certa altezza, dopodiché si ferma e si raggiunge l'equilibrio idrostatico.

Cosa succede in condizioni di equilibrio, e qual è il principio del **barometro di Torricelli** che permette di misurare la pressione atmosferica? La pressione che tende a far risalire il mercurio lungo il tubo è perfettamente controbilanciata dalla pressione esercitata dalla colonna di mercurio che si è venuta a creare. In accordo con la [legge di Stevino](#):

$$p = \rho g h$$

dove h rappresenta l'altezza della colonna di mercurio nel tubo rispetto al livello del metallo nella vaschetta. All'equilibrio vale la seguente relazione:

$$p_{atm} = \rho_{Hg} g h$$

dove ρ_{Hg} denota la [densità del mercurio](#). Di conseguenza è sufficiente misurare l'altezza della colonna di mercurio per avere tutti i dati necessari al calcolo della pressione atmosferica.

IL TUBO DI TORRICELLI

Torricelli ottenne come risultato

$$h = 760 \text{ mm}$$

ossia l'equilibrio idrostatico viene raggiunto quando la colonna di mercurio raggiunge un'altezza di 760 millimetri. Ecco così spiegata l'unità di misura della pressione che prende il nome di millimetri di mercurio, indicata con la sigla mmHg o in alternativa come torr. Essa non è nient'altro che una misura della pressione definita in modo tale che

$$760 \text{ mmHg} = 1 \text{ atm} = 101325 \text{ Pa}$$

Osservazioni sull'esperimento di Torricelli

1) Il **barometro a mercurio** ideato da Torricelli funziona solo se nello spazio rimasto libero nella sommità del tubo viene fatto il vuoto.

Provate ad immaginare di rovesciare un bicchiere vuoto in una vaschetta piena d'acqua. L'acqua sale riempiendo il bicchiere? No di certo: dentro il bicchiere c'è aria, e dunque anche pressione atmosferica, esattamente come all'esterno. Di conseguenza l'acqua nella vaschetta risente della stessa pressione ovunque, dentro e fuori il bicchiere, e non succede nulla.

Se invece togliamo l'aria dall'interno del bicchiere, eliminiamo anche la pressione atmosferica: l'acqua all'interno non è più spinta verso il basso come all'esterno, e quindi tenderà a salire fino a che non avrà raggiunto un'altezza tale da controbilanciare la pressione atmosferica agente al di fuori del bicchiere. Sostituite l'acqua col mercurio e avrete il barometro di Torricelli. :)

Il **principio di Pascal**, detta anche *legge di Pascal*, è una legge che descrive il comportamento dei fluidi e stabilisce che la pressione esercitata su un fluido viene trasmessa inalterata in ogni punto del fluido e sulla superficie del suo contenitore.

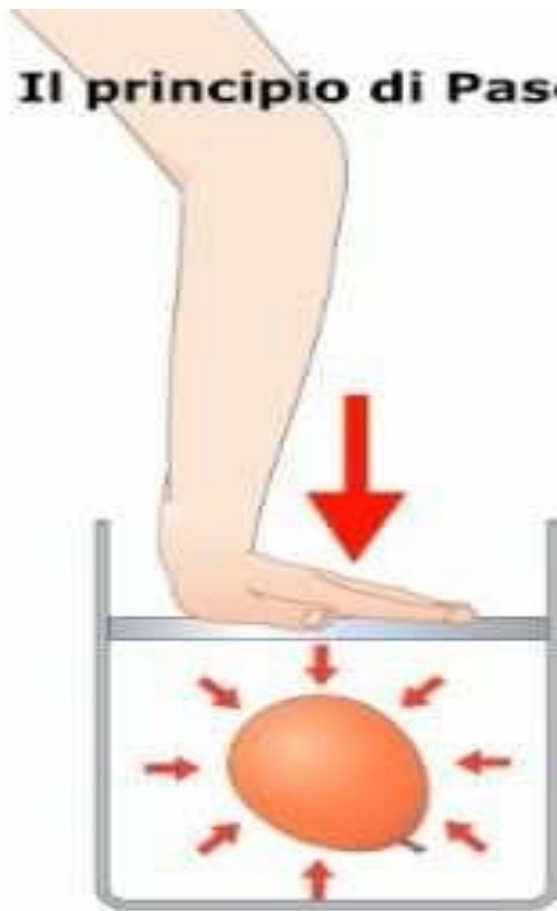
Qui di seguito trattiamo il principio di Pascal per i fluidi. In particolare esporremo l'**enunciato del principio di Pascal**, spiegandone il significato e trattandolo in riferimento alla principale applicazione fisica che lo contraddistingue: il torchio idraulico.

Come vedremo non c'è una particolare formula per il principio di Pascal, perché esso descrive una proprietà intrinseca dei fluidi, né tantomeno è possibile fornirne una dimostrazione della legge di Pascal che non sia sperimentale, dal momento che si tratta di un principio. Le uniche **formule del principio di Pascal** che presenteremo sono quelle relative all'applicazione del torchio idraulico.

Una variazione di pressione esercitata su un fluido viene trasmessa inalterata ad ogni punto del fluido e sulle pareti del suo contenitore

PRINCIPIO DI PASCAL

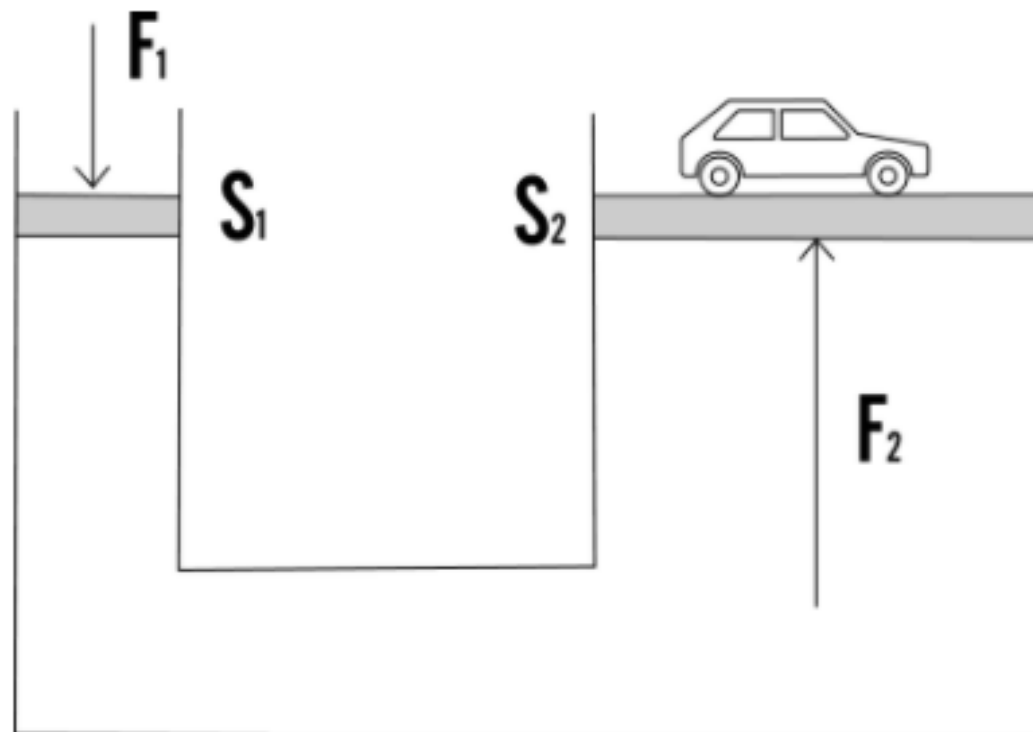
Il principio di Pascal



LEGGE DI PASCAL E TORCHIO IDRAULICO

Il principio di Pascal è un concetto teorico con una importantissima applicazione pratica. Esso è alla base del funzionamento del **torchio idraulico**, detto anche *elevatore idraulico* o *leva idraulica*, di cui ci occupiamo qui di seguito perché molto ricorrente negli esercizi di Idrostatica.

Ecco come si presenta un torchio idraulico:



Principio di Pascal e torchio idraulico.

LEGGE DI PASCAL E TORCHIO IDRAULICO

Abbiamo due pistoni mobili disposti su un apparato come quello in figura. Tipicamente un torchio idraulico viene riempito d'olio ed è costituito da due pistoni: il primo pistone presenta una **sezione** più piccola mentre il secondo ha sezione più grande. Se si esercita una **forza** sul pistone di sezione minore, spingendolo verso il basso, si genera sul secondo pistone una forza maggiore che permette di sollevare l'auto. Incredibile, non trovate? :)

Quando spingiamo il pistone 1 esercitiamo sull'olio sottostante una determinata pressione. Per il **principio di Pascal** tale pressione viene trasmessa ovunque nell'olio e sulle pareti del contenitore, quindi anche sul pistone 2.

In sintesi la legge di Pascal ci garantisce che la pressione agente su entrambi i pistoni sia uguale:

$$p_1 = p_2$$

Grazie alla definizione di pressione come rapporto tra la forza e superficie, possiamo riscrivere l'equazione precedente come

$$\frac{F_1}{S_1} = \frac{F_2}{S_2}$$

S_1 e S_2 sono le **aree** delle sezioni dei due pistoni, solitamente **circolari**. Poiché il rapporto tra la forza e la superficie deve rimanere costante, ne consegue che ad una superficie maggiore *deve* corrispondere una forza maggiore. Se non ne siete convinti algebricamente, provate a leggere la precedente equazione in questi termini: aumentando la sezione S_2 dobbiamo avere una forza F_2 più intensa, per fare in modo che il rapporto rimanga costante.

In sintesi il **principio di Pascal applicato al torchio idraulico** stabilisce che è sufficiente una piccola forza F_1 sul pistone S_1 per generare una forza F_2 più grande sul pistone S_2 con maggiore superficie.

ESEMPIO

Proviamo a vedere un esempio pratico. In riferimento alla figura dell'elevatore idraulico che abbiamo rappresentato prima, sappiamo che il pistone 1 ha raggio $r_1 = 8 \text{ cm}$ mentre il pistone 2 ha raggio $r_2 = 56 \text{ cm}$. Vogliamo sapere quale forza è necessaria applicare al pistone 1 per sollevare un'auto di 1250 kg .

Innanzitutto calcoliamo le due sezioni con la formula dell'area del cerchio:

$$S_1 = \pi r_1^2 = \pi (0,08 \text{ m})^2 \simeq 0,02 \text{ m}^2$$

$$S_2 = \pi r_2^2 = \pi (0,56 \text{ m})^2 \simeq 0,99 \text{ m}^2$$

Se dobbiamo sollevare l'auto è necessario che la forza F_2 sia almeno pari alla forza peso:

$$F_2 = F_p = mg = (1250 \text{ kg}) \cdot \left(9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right) \simeq 1,23 \cdot 10^4 \text{ N}$$

Ora possiamo calcolare F_1 con la formula del torchio idraulico:

$$\frac{F_1}{S_1} = \frac{F_2}{S_2}$$

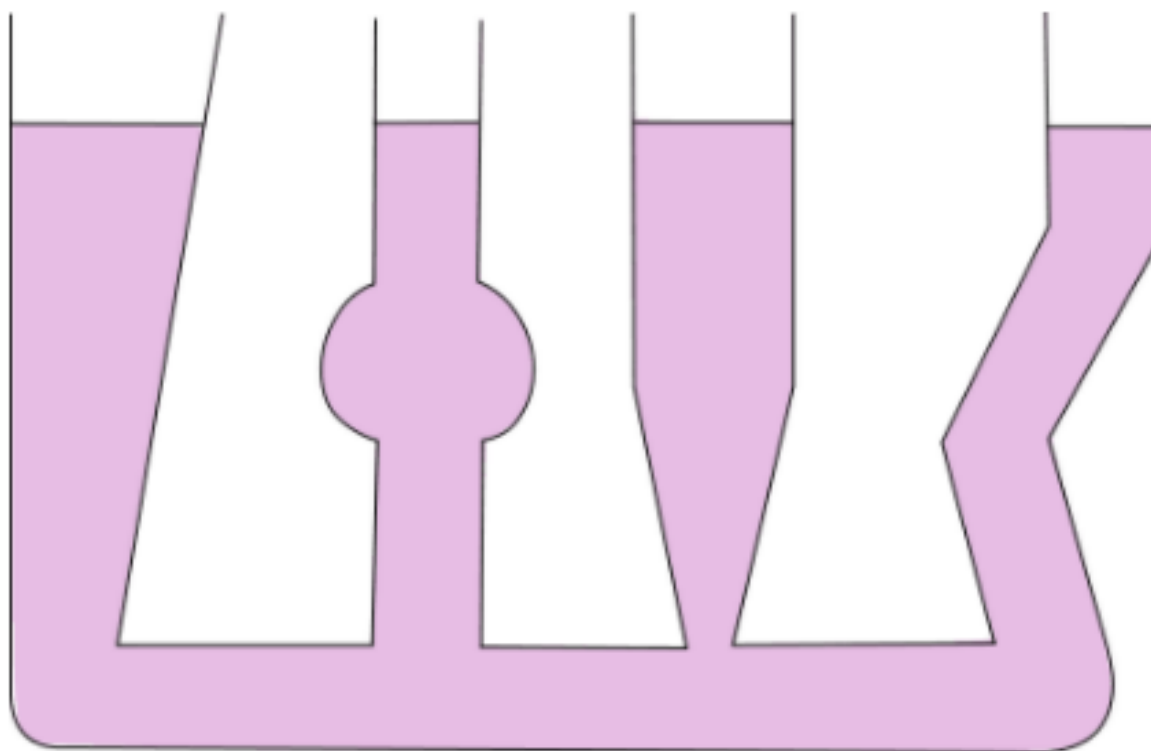
da cui

$$F_1 = \frac{S_1}{S_2} F_2 = \frac{0,02 \text{ m}^2}{0,99 \text{ m}^2} \cdot (1,23 \cdot 10^4 \text{ N}) \simeq 250 \text{ N}$$

Ed ecco che, con una forza di 250 N , ne abbiamo generata un'altra pari a 12300 N . :)

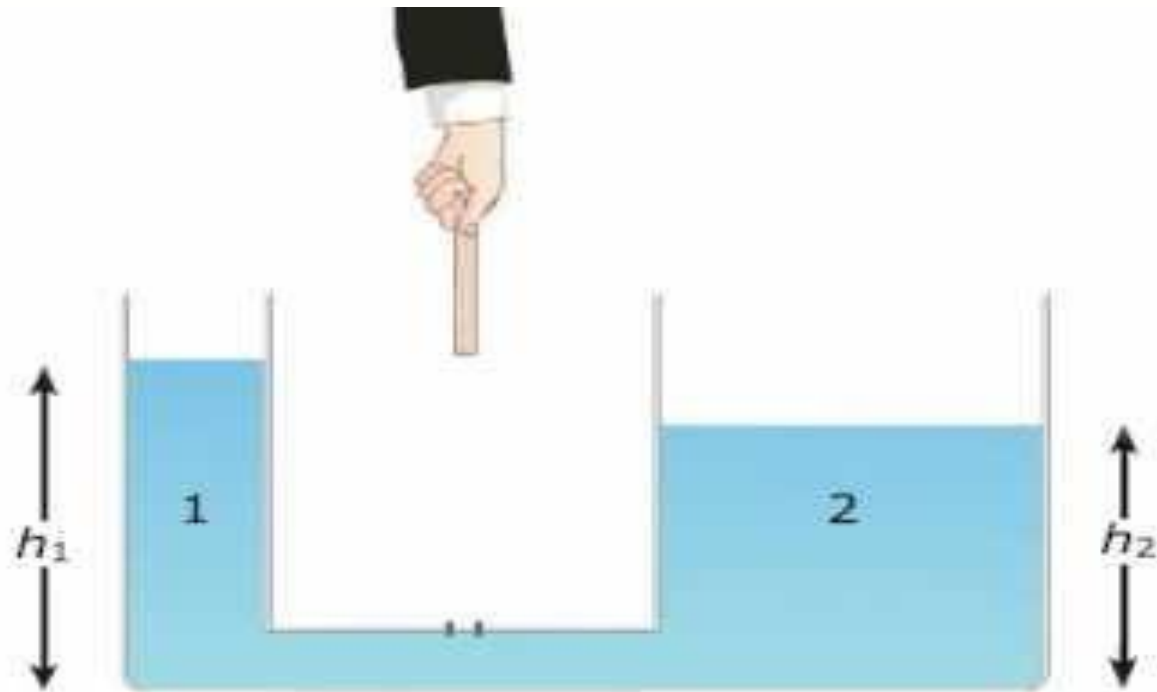
EQUILIBRIO STATICO DEI FLUIDI

Il **principio dei vasi comunicanti** è uno dei più semplici nello studio della fluidostatica. Prendiamo più contenitori di diversa forma e altezza e mettiamoli in comunicazione nel fondo, cosicché il **fluido** al loro interno (come ad esempio un liquido) sia libero di muoversi da un contenitore all'altro.



Quattro vasi comunicanti con diverse forme
ed uno stesso liquido in equilibrio.

VASI COMUNICANTI



Una volta che abbiamo finito di versare il liquido, raggiungiamo una situazione di equilibrio in cui il liquido è fermo e non scorre più attraverso il canale che collega i vari vasi. In questa situazione di equilibrio possiamo constatare **come funziona il principio dei vasi comunicanti**: il liquido ha raggiunto la medesima altezza in tutti i contenitori indipendentemente dalla loro forma. Le *superfici libere* del liquido si trovano tutte sullo stesso piano.

Se abbiamo due contenitori comunicanti in cui uno stesso liquido presenta le superfici libere a due altezze diverse, significa che non siamo in una situazione di equilibrio e pertanto il liquido tenderà a muoversi dal contenitore col livello più alto verso quello col livello più basso, fino a quando i due livelli non saranno gli stessi.

È importante ribadire quali sono le **condizioni per il principio dei vasi comunicanti** che abbiamo preso in considerazione. Le superfici libere raggiungono lo stesso livello in situazione d'equilibrio:

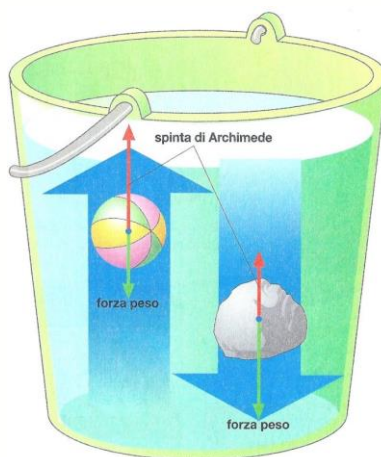
- indipendentemente dalla forma dei vasi comunicanti;
- a patto che nei vasi sia presente un solo liquido;
- a patto che i vasi siano abbastanza ampi in modo da evitare l'azione di disturbo esercitata dalle pareti interne sulla superficie libera. Il principio dei vasi comunicanti non vale nel caso dei **capillari**, ossia vasi con **sezioni** piccole.

PRINCIPIO DI ARCHIMEDE

Perché alcuni oggetti galleggiano sull'acqua e altri vanno a fondo? Il **principio fisico** che regola il galleggiamento, e più in generale il comportamento di un corpo immerso in un **fluido**, è stato scoperto da Archimede di Siracusa nel III **secolo** a.C. e non a caso va sotto il nome di **principio di Archimede**.

La legge in questione ci permette di studiare il galleggiamento dei corpi immersi parzialmente o completamente in un qualsiasi fluido, liquido o gas. L'enunciato della **legge di Archimede** stabilisce che un corpo immerso in un fluido riceve una spinta dal basso verso l'alto pari al peso del liquido spostato.

La spinta che viene menzionata nell'enunciato viene detta **spinta di Archimede**, o spinta idrostatica, ed è una **forza** diretta verticalmente verso l'alto, quindi con la stessa direzione ma verso opposto rispetto alla **forza peso**. Essa viene solitamente indicata con il simbolo F_A o, a seconda dei casi, con la lettera S .



PRINCIPIO DI ARCHIMEDE

Vediamo di tradurre l'enunciato in linguaggio matematico e di scrivere la **formula del principio di Archimede**:

$$\vec{F}_A = -\vec{P}_{fl}$$

dove \vec{F}_A indica la spinta di Archimede mentre \vec{P}_{fl} indica la forza peso del fluido spostato (o se preferite, occupato). Poiché stiamo ragionando con delle **grandezze vettoriali** ricordatevi sempre di specificare la direzione ed il verso: in un **sistema di riferimento** con le quote crescenti dirette verso l'alto la forza peso è un **vettore** che punta verticalmente verso il basso; il segno meno fa sì che la spinta di Archimede sia un vettore che punta verticalmente verso l'alto.

In riferimento ai moduli, e dunque a prescindere dai segni:

$$F_A = P_{fl}$$

Questa formula non è molto operativa nella risoluzione degli esercizi e nei calcoli espliciti, ma non è un problema: con il semplice ragionamento possiamo tradurla in una formula più esplicita. Scriviamo l'espressione della forza peso come prodotto tra la **massa** e l'**accelerazione di gravità**

$$F_A = m_{fl}g$$

PRINCIPIO DI ARCHIMEDE

Vediamo di tradurre l'enunciato in linguaggio matematico e di scrivere la **formula del principio di Archimede**:

$$\vec{F}_A = -\vec{P}_{fl}$$

dove \vec{F}_A indica la spinta di Archimede mentre \vec{P}_{fl} indica la forza peso del fluido spostato (o se preferite, occupato). Poiché stiamo ragionando con delle **grandezze vettoriali** ricordatevi sempre di specificare la direzione ed il verso: in un **sistema di riferimento** con le quote crescenti dirette verso l'alto la forza peso è un **vettore** che punta verticalmente verso il basso; il segno meno fa sì che la spinta di Archimede sia un vettore che punta verticalmente verso l'alto.

In riferimento ai moduli, e dunque a prescindere dai segni:

$$F_A = P_{fl}$$

Questa formula non è molto operativa nella risoluzione degli esercizi e nei calcoli espliciti, ma non è un problema: con il semplice ragionamento possiamo tradurla in una formula più esplicita. Scriviamo l'espressione della forza peso come prodotto tra la **massa** e l'**accelerazione di gravità**

$$F_A = m_{fl}g$$

PRINCIPIO DI ARCHIMEDE

Ora ricordiamoci la **formula della densità**, la quale stabilisce che la densità è il rapporto tra la massa ed il volume: $\rho = \frac{m}{V}$. Invertendo la formula in favore della massa abbiamo $m = \rho V$; nel nostro caso ci serve la massa di fluido occupato, quindi la esprimeremo come prodotto tra la densità del fluido e il volume di fluido occupato dal corpo:

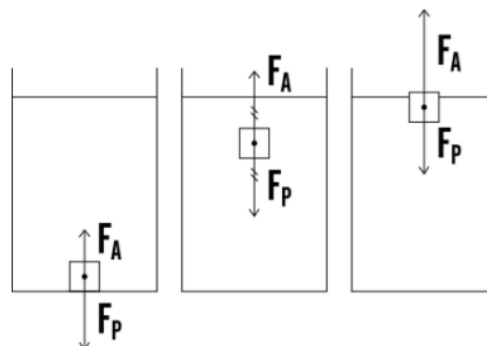
$$F_A = \rho_{fl} V_{imm} g$$

La **formula della spinta di Archimede** ci permette quindi di esprimerla come prodotto tra:

- la densità del fluido ρ_{fl} ;
- il volume immerso del corpo V_{imm} (a seconda che il corpo sia parzialmente o completamente immerso);
- l'accelerazione di gravità.

Dalla formula si vede che la spinta di Archimede è **direttamente proporzionale** al volume immerso del corpo (attenzione: *al volume immerso del corpo* e non *al volume del corpo immerso*). Più correttamente, la **forza di Archimede** andrebbe definita come la forza proporzionale al peso del fluido spostato. Cosa vuol dire?

PRINCIPIO DI ARCHIMEDE



Le possibili situazioni a seconda che la spinta di Archimede sia più o meno intensa rispetto alla forza peso.

- 1) Nel primo caso la forza peso è più intensa della spinta di Archimede ($F_P > F_A$) e quindi il corpo affonda.
- 2) Nel secondo caso le due forze sono uguali in modulo ($F_P = F_A$) per cui il corpo è in perfetto equilibrio. Di conseguenza il corpo si mantiene fermo nella sua posizione ovunque venga collocato all'interno del fluido. Si tratta di un caso un po' particolare e difficile da realizzare.
- 3) Nel terzo caso invece è la forza di Archimede ad essere più intensa di quella di gravità ($F_P < F_A$), quindi se il corpo viene completamente immerso tende a risalire verso l'alto accelerando, fino a emergere e a raggiungere una posizione di equilibrio ($F_P = F_A$) in cui galleggia con una parte del proprio volume immersa. È ciò che accade quando al mare immergete completamente un pallone: non appena lo lasciate andare, esso risale molto rapidamente uscendo fuori dall'acqua.

È importante sottolineare che nel caso 3) il corpo in condizione di equilibrio ha solo una parte immersa nel fluido. In questo caso la parte di volume immersa è quella necessaria per spostare quel volume di fluido il cui peso pareggia il peso dell'intero corpo, facendolo quindi galleggiare.

I **fluidi ideali** sono fluidi non viscosi (privi di attrito) e incompressibili, mentre i **fluidi reali** sono viscosi e in particolare sono comprimibili nel caso dei gas, incompressibili nel caso dei liquidi. Il concetto di fluido reale si rende necessario nello studio della fluidodinamica.

Fino a qui abbiamo studiato i **fluidi** in quiete, ovvero le leggi dell'**idrostatica** (detta anche *fluidostatica*). A partire dalla prossima lezione invece cominceremo a parlare di fluidi in moto, occupandoci di quella che viene definita **fluidodinamica**.

Fluidi ideali

Diciamo *fluidi ideali* tutti i fluidi, liquidi o gas, che presentano due caratteristiche: devono essere incompressibili e non viscosi.

In un fluido ideale la **densità** rimane quindi sempre la stessa e l'attrito viscoso non è presente, o quantomeno è trascurabile.

Fluidi reali

Un *fluido reale* è sia comprimibile, sia viscoso.

La **viscosità** di un fluido (o **coefficiente di attrito viscoso**) è una grandezza che misura la propensione del fluido a generare attrito interno tra i propri strati in movimento; è una caratteristica che dipende dal tipo di fluido e che riguarda esclusivamente i fluidi reali.

Fluido	Coefficiente di attrito viscoso
Acqua (10 °C)	$1,308 \cdot 10^{-3}$ PI
Acqua (20 °C)	$1,002 \cdot 10^{-3}$ PI
Acqua (50 °C)	$0,5471 \cdot 10^{-3}$ PI
Acqua (100 °C)	0,2822 PI
Aria (0 °C)	$17,4 \cdot 10^{-6}$ PI
Aria (27 °C)	$18,6 \cdot 10^{-6}$ PI
Burro d'arachidi	250 PI

La **portata** in Fisica (simbolo Q) è una grandezza che esprime il volume di fluido che attraversa una sezione A di un tubo in un intervallo di tempo Δt . Un **regime stazionario** in fluidodinamica è la condizione per cui in ogni punto di un fluido in moto la velocità è costante.

Una delle nuove grandezze che viene introdotta in fluidodinamica è la **portata**, detta anche **portata volumetrica**. Essa è definita come il rapporto tra il volume di fluido che attraversa perpendicolarmente una certa sezione A di un condotto nell'intervallo di tempo Δt .

In accordo con la definizione, la **formula della portata** è data da

$$Q = \frac{V}{\Delta t}$$

La portata esprime dunque la quantità di volume di fluido che attraversa la sezione di un tubo nell'unità di tempo; dalla precedente formula si deduce immediatamente che la sua **unità di misura** è il **metro cubo al secondo** (m^3/s).

La **portata** in Fisica (simbolo Q) è una grandezza che esprime il volume di fluido che attraversa una sezione A di un tubo in un intervallo di tempo Δt . Un **regime stazionario** in fluidodinamica è la condizione per cui in ogni punto di un fluido in moto la velocità è costante.

Una delle nuove grandezze che viene introdotta in fluidodinamica è la **portata**, detta anche **portata volumetrica**. Essa è definita come il rapporto tra il volume di fluido che attraversa perpendicolarmente una certa sezione A di un condotto nell'intervallo di tempo Δt .

In accordo con la definizione, la **formula della portata** è data da

$$Q = \frac{V}{\Delta t}$$

La portata esprime dunque la quantità di volume di fluido che attraversa la sezione di un tubo nell'unità di tempo; dalla precedente formula si deduce immediatamente che la sua **unità di misura** è il **metro cubo al secondo** (m^3/s).

C'è anche un'altra definizione equivalente ben più operativa e che permette di effettuare il **calcolo della portata**. In accordo con le formule del **cilindro**, il volume V è dato dal prodotto dell'area (la sezione del tubo) per l'altezza (la lunghezza del tratto di tubo).

Supponendo che il fluido scorra a velocità costante, secondo la legge del **moto rettilineo uniforme** l'altezza si può scrivere come il prodotto della velocità per il tempo

$$v = \frac{h}{\Delta t} \rightarrow h = v \Delta t$$

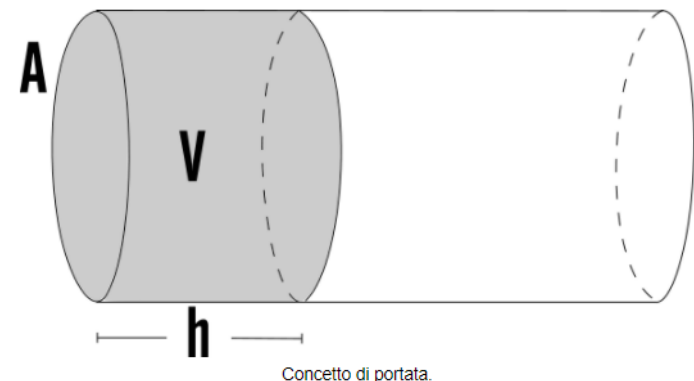
Pertanto l'equazione della portata diventa:

$$Q = \frac{V}{\Delta t} = \frac{Ah}{\Delta t} = \frac{Av\Delta t}{\Delta t}$$

da cui

$$Q = Av$$

Generalizzando tale formula la portata può essere vista anche come il prodotto della velocità di scorrimento del fluido per la sezione da esso attraversata.



1) Calcoliamo la portata di una pompa di benzina sapendo che attraverso la sua sezione sono passati 15 litri in 50 secondi.

Svolgimento: usiamo la definizione di portata come rapporto tra il volume e l'intervallo di tempo, ricordandoci però di convertire i litri in metri cubi ($1 \text{ l} = 0,001 \text{ m}^3$).

$$Q = \frac{V}{\Delta t} = \frac{0,015 \text{ m}^3}{50 \text{ s}} = 3 \cdot 10^{-4} \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$$

2) Vediamo un altro esempio. Attraverso una sezione circolare di raggio 19 mm scorrono 60 m³ di acqua ogni ora. Con quale velocità l'acqua attraversa la sezione?

Svolgimento: per rispondere possiamo uguagliare tra di loro le due definizioni di portata che abbiamo visto in modo da scrivere un'unica equazione che contenga tutto ciò che ci serve.

$$\frac{V}{\Delta t} = Av$$

Riscriviamola in favore della velocità e facciamo i conti, esprimendo la misura della sezione mediante la formula per l'area del cerchio

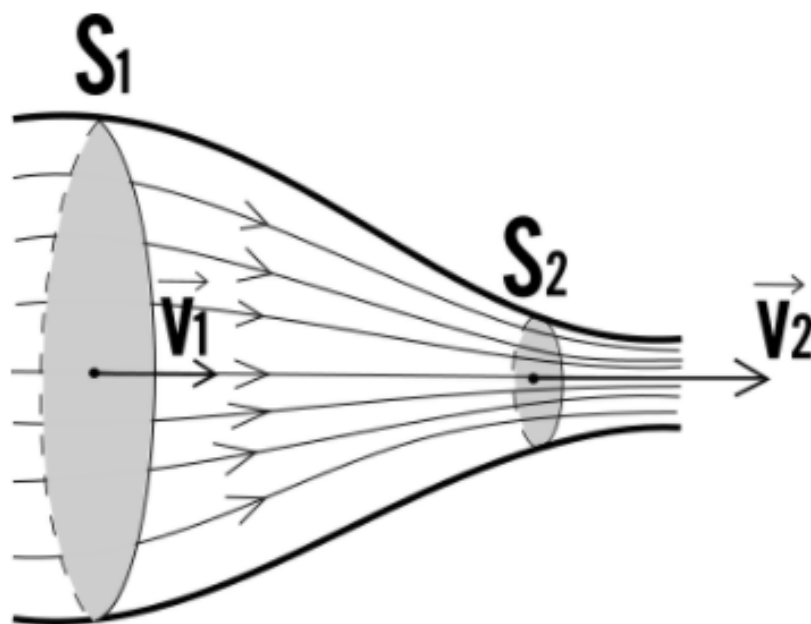
$$v = \frac{V}{A\Delta t} = \frac{V}{\pi r^2 \Delta t} = \frac{60 \text{ m}^3}{\pi \cdot (0,019 \text{ m})^2 \cdot (3600 \text{ s})} \simeq 14,7 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

EQUAZIONE DI CONTINUITÀ

L'**equazione di continuità** in fluidodinamica, detta anche *equazione di Leonardo*, stabilisce che la portata attraverso un tubo di sezione variabile resta costante, cosicché al diminuire della sezione aumenta la velocità del fluido, e viceversa all'aumentare della sezione diminuisce la velocità.

L'**equazione di continuità** nella sua formulazione più semplice riguarda i **fluidi ideali** e stabilisce che la **portata volumetrica** attraverso un tubo di sezione variabile, resta costante.

Se consideriamo il tubo della seguente figura



Equazione di continuità: portata costante in due sezioni distinte.

EQUAZIONE DI CONTINUITÀ

vediamo che esso ha due sezioni diverse S_1 e S_2 . Se nella sezione S_1 il fluido scorre alla **velocità** v_1 , la portata per definizione è:

$$Q_1 = v_1 S_1$$

Se si considera la sezione S_2 il fluido avrà una velocità diversa e una nuova portata:

$$Q_2 = v_2 S_2$$

L'equazione di continuità stabilisce che la portata resta costante, e dunque non abbiamo due diversi valori di Q . È possibile quindi uguagliare le due portate e scrivere così la **formula dell'equazione di continuità**:

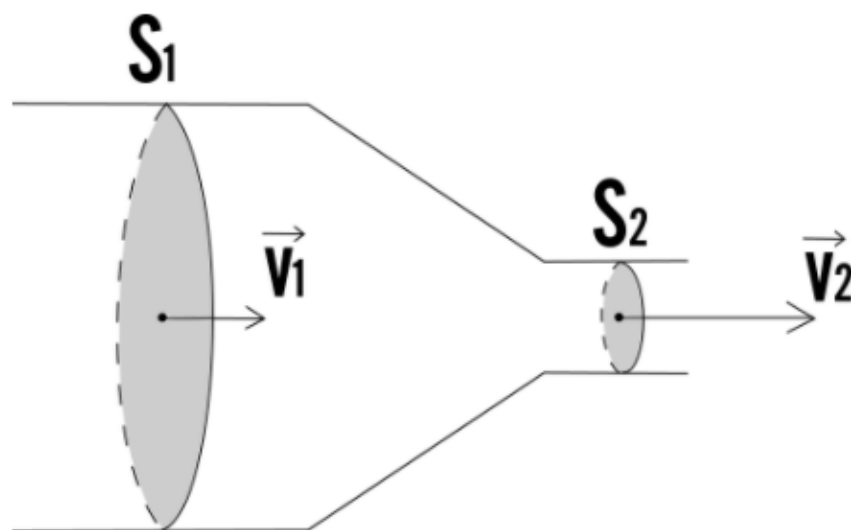
$$v_1 S_1 = v_2 S_2 \quad (\text{fluido ideale})$$

Analizziamo l'equazione di continuità nel caso più semplice. Come vedete l'equazione è molto semplice e ci dice che, laddove la sezione del condotto è più grande la velocità risulta minore, e viceversa. In termini più rigorosi, si può esprimere il significato dell'equazione di continuità asserendo che tra la sezione e la velocità c'è una relazione di **proporzionalità inversa**.

Se ad esempio la sezione S_2 fosse la metà di S_1 , allora la velocità v_2 sarebbe doppia rispetto a v_1 . Questo tipo di proporzionalità era stata compresa già da Leonardo da Vinci, motivo per il quale l'equazione di continuità è a volte presentata anche come **equazione di Leonardo**.

ESEMPIO

Vediamo un piccolo esempio di applicazione dell'equazione di continuità. Calcoliamo con quale velocità l'acqua fuoriesce all'estremità di un tubo con **sezione circolare** il cui raggio è quattro volte più piccolo di quello della sezione principale del tubo, in cui l'acqua scorre alla velocità di 3 m/s.



Esempio sull'equazione di continuità.

Impostiamo l'equazione di continuità e ricaviamo la velocità v_2 sostituendo alla sezione la formula dell'**area del cerchio**.

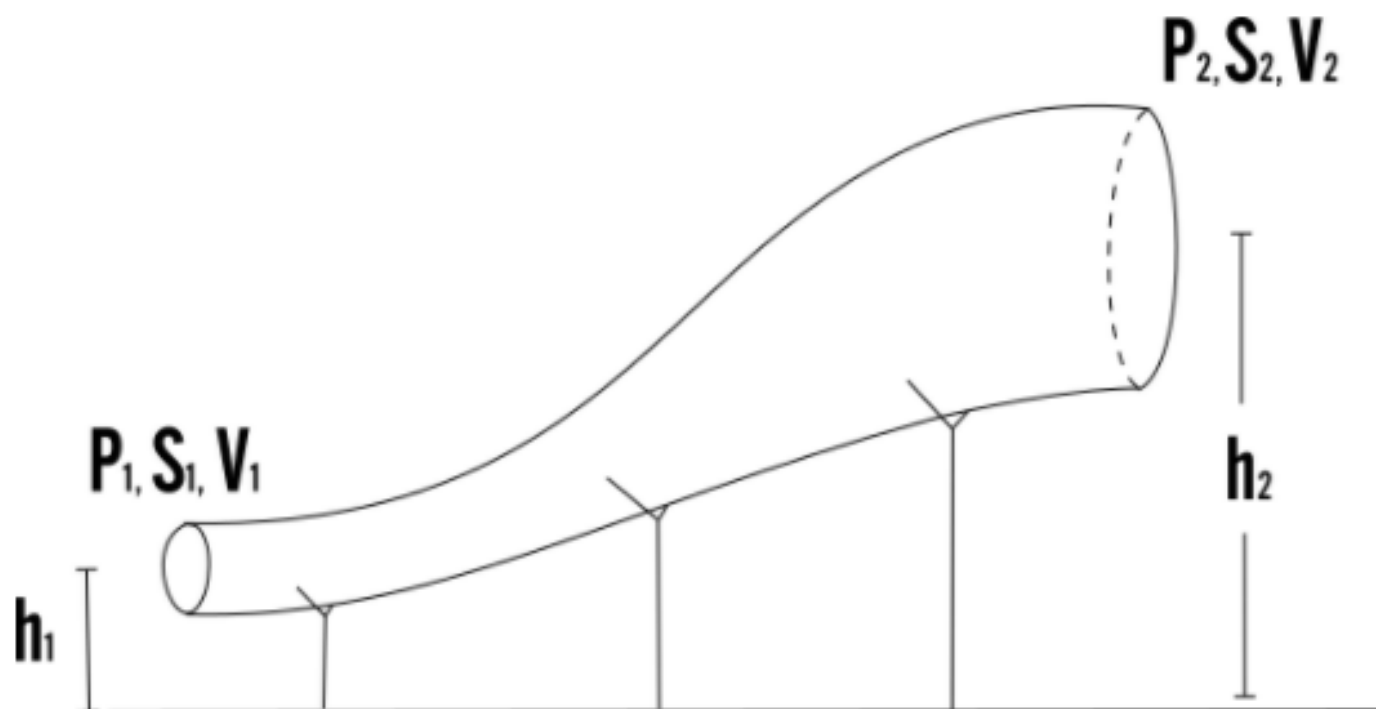
$$v_2 = \frac{S_1}{S_2} v_1 =$$

$$= \frac{\pi r_1^2}{\pi \left(\frac{r_1}{4}\right)^2} v_1 = \frac{r_1^2}{\frac{r_1^2}{16}} v_1 = 16v_1 = 48 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

TEOREMA DI BERNOULLI

Il **teorema di Bernoulli** (o **equazione di Bernoulli**, o ancora principio di Bernoulli) in fluidodinamica è una relazione che lega tra loro la velocità di scorrimento, la pressione e la densità di un fluido in un tubo con sezioni e altezze variabili, individuando una costante nel moto dei fluidi ideali.

L'**equazione di Bernoulli** è la legge più importante della fluidodinamica. Per introdurla consideriamo un condotto con sezione e altezza variabili, come in figura:



Un tubo con sezioni distinte e con le relative pressioni e velocità del fluido.

TEOREMA DI BERNOULLI

All'interno del condotto scorre un fluido ideale, dunque incompressibile e non viscoso. Consideriamo due punti del condotto, ognuno con una propria sezione S , una pressione p , una velocità di scorrimento del fluido v ed un'altezza h .

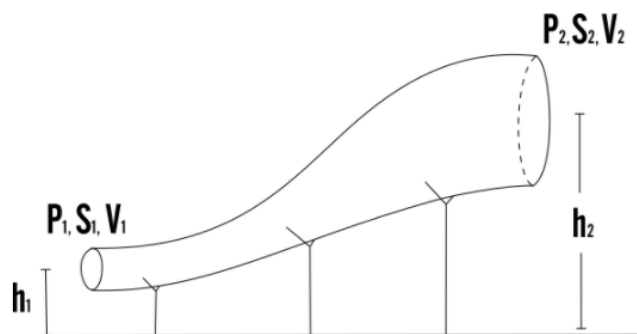
Indicando con ρ la densità del fluido, il **teorema di Bernoulli** ci dice che vale la seguente legge:

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g h_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g h_2$$

L'equazione di Bernoulli ci dice qual è la relazione tra la velocità del fluido, la sua pressione e l'altezza. In generale possiamo scrivere che:

$$p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g h = \text{costante}$$

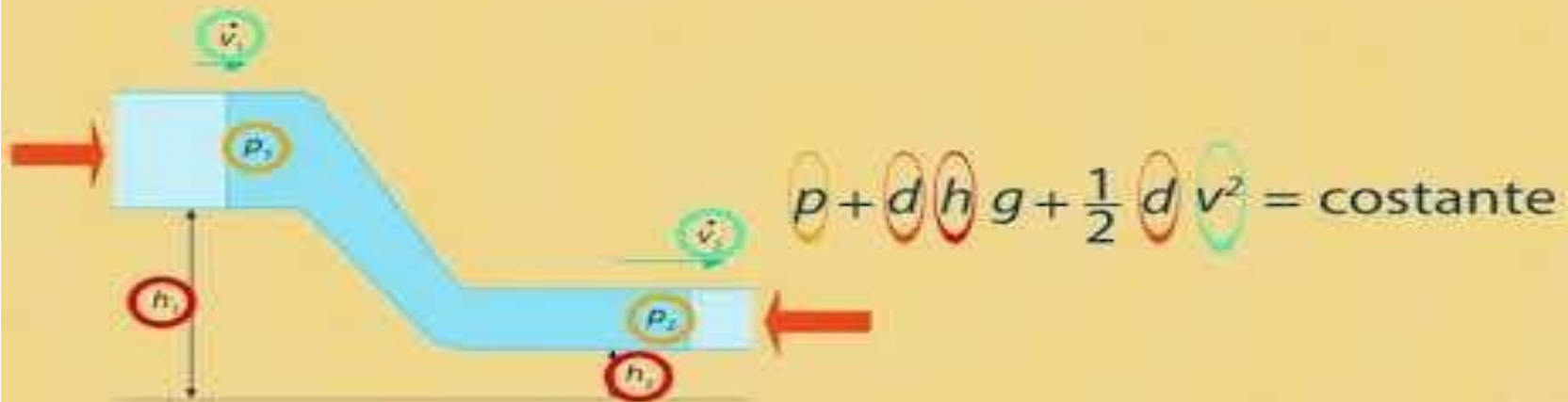
In altri termini, in qualunque punto del condotto ci si trovi, la somma dei tre termini che compaiono nell'equazione è costante.



Un tubo con sezioni distinte e con le relative pressioni e velocità del fluido.

TEOREMA DI BERNOULLI

In un fluido ideale di densità d in moto stazionario in un condotto con velocità v , l'energia per unità di volume si conserva.



TEOREMA DI BERNOULLI

$$p + \rho \frac{u^2}{2} + \rho gh = \text{costante}$$

L'equazione di Bernoulli:

fissa il valore della pressione, della velocità e dell'altezza di una qualunque parte del fluido in movimento.

Si ricava direttamente dalla conservazione dell'energia.

L'equazione di Bernoulli si applica a fluidi incomprimibili ($\rho = \text{costante}$), non viscosi e irrotazionali ($w = 0$) in moto stazionario, tale cioè che la velocità del fluido in un dato punto è sempre la stessa.

In conseguenza all'equazione di Bernoulli, la pressione idrostatica p di un fluido può essere diversa secondo lo stato di quiete o di moto del fluido.

SFIGMOMANOMETRO

Il funzionamento dello **sfigmomanometro** può essere analizzato dal punto di vista fisico solo con alcune semplificazioni: è necessario considerare il sangue un liquido ideale, e non considerare alcuni fattori che potrebbero interferire nella misurazione (come ad esempio gli ormoni, i fluidificanti nel sangue ecc.). Malgrado queste semplificazioni, che andranno sicuramente ad incidere sulla validità dei risultati sperimentali ottenuti, va detto che lo sfigmomanometro rimane comunque uno strumento fondamentale per la medicina.



Nel simbolismo adottato nella spiegazione, p_0 è la pressione atmosferica in mmHg, p_{\max} è la *pressione sistolica* e p_{\min} è la *pressione diastolica* come sono misurate normalmente (in mmHg oltre la pressione atmosferica). Ne segue che p_{\max} o $p_{\min} + p_0$ indicano rispettivamente la pressione massima o la pressione minima misurate in mmHg comprendendo anche la pressione atmosferica.

Preparazione

All'inizio della misurazione, nel manicotto c'è aria con pressione p_0 uguale alla pressione atmosferica; il manometro collegato al manicotto è tarato in modo da avere come zero questo valore, quindi deve segnare 0 mmHg. Nell'arteria brachiale il sangue scorre invece a pressione variabile tra la pressione diastolica minima e quella sistolica massima.

Gonfiando il manicotto con la pompetta, la pressione dell'aria all'interno aumenta. L'arteria, sottoposta a una maggiore pressione esterna, tende quindi a restringersi. Per il Principio di Leonardo, la velocità del sangue aumenta man mano che il diametro dell'arteria diminuisce. Inoltre, quando la pressione del manicotto è diventata maggiore della pressione diastolica, il sangue ha spinta sufficiente a passare attraverso l'arteria solo alla sistole e nei momenti vicini. Questo è tanto più vero quanto più la pressione del manicotto si avvicina alla sistolica. Questi due fattori fanno sì che il moto del sangue passi da laminare a vorticoso. Il passaggio irregolare del sangue attraverso l'arteria è causa dei cosiddetti suoni di Korotkoff, una serie di rumori sordi e ritmici che si possono ascoltare col fonendoscopio. Questa proprietà è da ricordare in quanto si rivela fondamentale per la misurazione della pressione.

Non appena la pressione del manicotto è maggiore della pressione massima del sangue (vale a dire maggiore di $p_{\max} + p_0$), l'arteria si occlude e il flusso del sangue in essa si arresta completamente. Col fonendoscopio non si sente più nulla. Quando si è in questa situazione, comincia la misurazione vera e propria.

Misurazione

Aprendo un po' la valvola, il manicotto si sgonfia lentamente riequilibrando la pressione dell'aria al proprio interno con quella atmosferica. Nell'istante in cui la pressione del manicotto torna uguale a $p_{max} + p_0$, il sangue torna a scorrere nell'arteria, nuovamente in moto vorticoso a causa del diametro ridotto dell'arteria: si tornano dunque a sentire i rumori caratteristici con il fonendoscopio. Sul manometro è segnata in questo istante la pressione sistolica p_{max} misurata in mmHg oltre la pressione atmosferica.

I suoni di Korotkoff cessano nel momento in cui la pressione esterna (quella del manicotto) non è più tale da impedire a tutto il sangue di passare attraverso l'arteria e il sangue torna a muoversi di moto laminare. Si assume che questo accada nell'istante in cui la pressione del sangue è uguale alla pressione diastolica $p_{min} + p_0$; la pressione segnalata sul manometro è quindi la pressione diastolica p_{min} , misurata in mmHg oltre la pressione atmosferica. Attualmente c'è dibattito tra i medici se sia da considerare vera pressione diastolica la pressione segnalata all'ultima ricorrenza dei suoni di Korotkoff o nel primo istante di silenzio

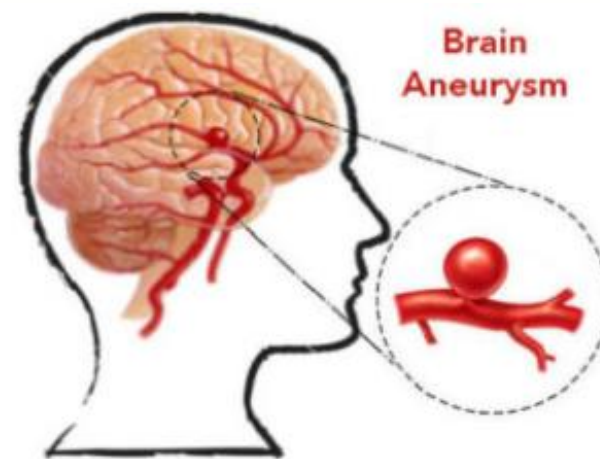
ANEURISMA

Cosa hanno in comune Bernoulli e un aneurisma?

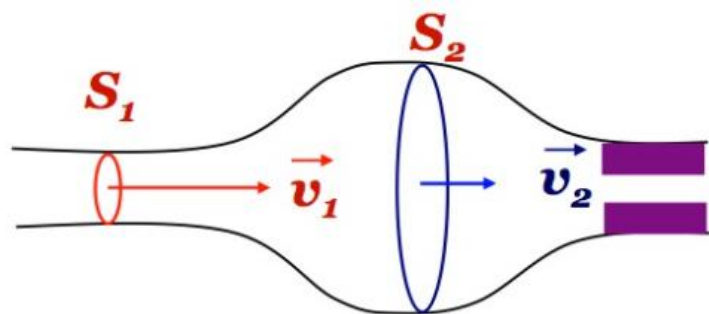
Con il termine **aneurisma** viene indicata una **dilatazione anomala** della parete di un vaso sanguigno, solitamente di un'arteria.

Le cause dell'insorgere di tale patologia possono essere molteplici ed in molti casi risultano asintomatici.

La conseguenza peggiore di un aneurisma è la sua rottura.



Aneurisma cerebrale



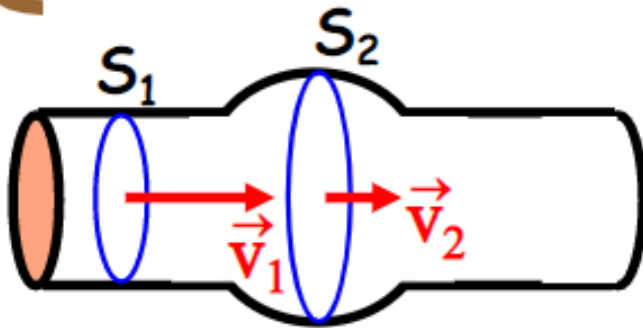
Schematizzazione di un condotto orizzontale

Per la **legge di Bernoulli**, se in un condotto c'è un allargamento, la velocità del fluido che vi scorre diminuisce e la pressione aumenta. Pertanto un **aneurisma**, che costituisce una dilatazione patologica di un'arteria, è sempre destinato a peggiorare, se non curato tempestivamente.

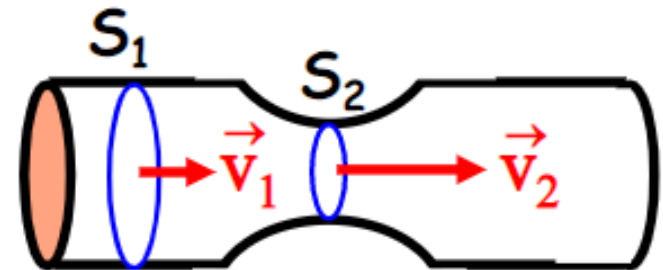
ANEURISMA E STENOSI

Vaso sanguigno in posizione orizzontale ($h_1 = h_2$):

Bernoulli $\rightarrow \frac{1}{2}dv_1^2 + dgh_1 + p_1 = \frac{1}{2}dv_2^2 + dgh_2 + p_2$
Eq.continuità $\rightarrow Q = S_1 v_1 = S_2 v_2$



ANEURISMA
 $v_2 < v_1 \rightarrow p_2 > p_1$



STENOSI
 $v_2 > v_1 \rightarrow p_2 < p_1$

Fenomeni irreversibili, tendono a cronicizzare:
l'aneurisma tende a espandersi, la stenosi a restringersi